Théorème de Wantzel, corollaire et application. 127, 191

(Réf : Carrega p. 24).

Énoncé :

<u>Théorème</u> : $t \in \mathbb{R}$ est constructible si et seulement si il existe $p \geq 1$ et une suite de sous corps de $\mathbb{R}$ $L_1, \ldots, L_p$ tels que $L_1 = \mathbb{Q}$, $t \in L_p$ et $\forall j \in [\![1, p-1]\!]$, $L_j \subset L_{j+1}$ et $[L_{j+1} : L_j] = 2$.

<u>Corollaire</u> : Tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré une puissance de 2.

<u>Application</u> : La trissection de l'angle n'est pas toujours possible.

<u>Dém</u> : <u>Schéma de preuve</u> :

① $\Rightarrow$
② $\Leftarrow$
③ Corollaire
④ La trissection n'est pas toujours possible.

① Soit $t \in \mathbb{R}$ constructible, c'est l'abscisse d'un point Ω constructible et on note $\Omega_1, \ldots, \Omega_n = \Omega$ la suite de points pour construire Ω et quitte à en construire certains on peut supposer $\Omega_1 = (0,0)$ et $\Omega_2 = (1,0)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, Ω_i a pour coordonnées (x_i, y_i), $K_1 \overset{def}{=} \mathbb{Q}(x_1, y_1) = \mathbb{Q}$ et $K_{i+1} \overset{def}{=} K_i(x_{i+1}, y_{i+1})$ si $i \in [\![1, n-1]\!]$.

On a alors $\underset{\mathbb{Q}}{K_1} \subset \cdots \subset K_n$ et $t \in K_n$.

Procédons par récurrence :

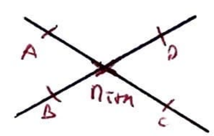
$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, on pose H_i : "$K_{i+1} = K_i$ ou $[K_{i+1} : K_i] = 2$".

↳ <u>Initialisation</u> : $K_1 = K_2 = \mathbb{Q}$ donc H_1 vraie.

↳ <u>Hérédité</u> : Soit $i \in [\![1, n-2]\!]$. On suppose H_i vraie.

Différents cas sont possibles : on notera par la suite $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ des éléments de K_i.

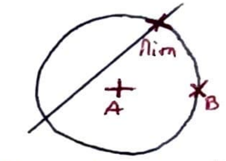
ⓐ <u>Ω_{i+1} est l'intersection de deux droites</u> :



(x_{i+1}, y_{i+1}) est donc solution d'un système : $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$ et par les axiomes de construction on a $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \in K_i^6$.

On résout le système et on a $x_{i+1}, y_{i+1} \in K_i$ d'où $K_{i+1} = K_i$.

ⓑ <u>Ω_{i+1} est l'intersection d'une droite et un cercle</u> :



(x_{i+1}, y_{i+1}) est solution d'un système :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0 & (2) \end{cases}$$

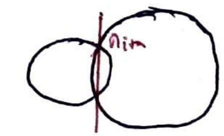
– Si $\beta \neq 0$ on a $y = \frac{-\gamma - \alpha x}{\beta}$ (1) et on le réinjecte dans (2) x_{i+1} est donc racine d'un polynôme de K_i de degré 2 d'où $[K_i(x_{i+1}) : K_i] \leq 2$. (ⓓ)

— si $x_{i+1} \in K_i$, $y_{i+1} \in K_i$ par (1) d'où $K_{i+1} = K_i$

— si $x_{i+1} \notin K_i$, $[K_i(x_{i+1}) : K_i] = 2$ et donc par (1) on a $[K_{i+1} : K_i] = [K_i(x_{i+1}, y_{i+1}), K_i] = 2$.

– Si $\beta \neq 0$, on a $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$ on réinjecte dans (2) et on résout comme le cas $\beta = 0$.

ⓒ <u>Ω_{i+1} est l'intersection de 2 cercles</u> :



(x_{i+1}, y_{i+1}) est solution de :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 & (L_1) \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0 & (L_2) \end{cases}$$

on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et on a le système : $\begin{cases} 2(\alpha' - \alpha) x + 2(\beta' - \beta) y + \gamma - \gamma' = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$

et on s'est ramené au cas précédent.

Donc H_{i+1} est vraie.

Quitte à enlever les extensions K_i tq $K_i = K_{i+1}$ on a trouvé $\underset{\mathbb{Q}}{L_1} \subsetneq L_2 \subsetneq \cdots \subsetneq L_p \ni t$ telles que $[L_{j+1} : L_j] = 2$.

② Supposons l'existence d'une telle tour de corps.

$\forall j \in [\![1, p]\!]$, on pose H_j : "$L_j \subset \mathcal{C}$".

↳ <u>Initialisation</u> : $L_1 = \mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$.

↳ <u>Hérédité</u> : Soit $j \in [\![1, p-1]\!]$. On suppose H_j vraie.

Soit $a \in L_{j+1}$. Comme $[L_{j+1} : L_j] = 2$, $(1, a, a^2)$ liée dans L_j via $\alpha a^2 + \beta a + \gamma = 0$.

– si $\alpha = 0$, $a = -\frac{\gamma}{\beta} \in L_j \subset \mathcal{C}$.

– si $\alpha \neq 0$, $a = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \in \mathcal{C}$ par stabilité de $\mathcal{C}$ par $\sqrt{\ }$.

Donc $L_p \subset \mathcal{C}$ et $t \in L_p$ donc $t \in \mathcal{C}$.

③ t constructible donc par multiplicativité des degrés :

$$[L_p:\mathbb{Q}] = [L_p:L_{p-1}]\cdots[L_2:\mathbb{Q}] = 2^{p-1}$$

et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(t) \subset L_p$ d'où $[L_p:\mathbb{Q}] = 2^{p-1} = [L_p:\mathbb{Q}(t)][\mathbb{Q}(t):\mathbb{Q}]$

d'où $[\mathbb{Q}(t):\mathbb{Q}] \mid 2^{p-1}$ donc $\exists q \in \mathbb{N}$; $[\mathbb{Q}(t):\mathbb{Q}] = 2^q$ d'où le corollaire.

④ Montrons que $\frac{\pi}{3}$ n'est pas trissectable : on regarde $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

On linéarise d'où : $\cos\left(3\times\frac{\pi}{9}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ annulé par $P = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

Supposons qu'il existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \wedge q = 1$ racine de P alors :

$$8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0.$$

D'où $p \mid q^3$, $q^2 \mid 8p^3$ d'où par le lemme de Gauss, $\begin{array}{l} p = \pm 1 \\ q = \pm 1 \text{ ou } \pm 2 \end{array}$ $(*)$

Or $\forall p,q$ vérifiant $(*)$, $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ donc P n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ est de degré 3 donc irréductible d'où :

$[\mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9})):\mathbb{Q}] = 3 \neq 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ pas constructible.

Remarques sur le développement :

⊛ Bien connaître la construction des nombres constructibles...

⊛ Si D droite passant par $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, D a pour équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2)$

car : - si $a_1 = b_1$, $D : x - a_1 = 0$

- si $a_1 \neq b_1$, $D : y - a_2 = (x - a_1)\left(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\right)$

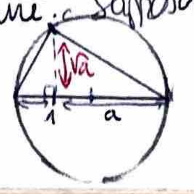
⊛ Si le cercle ~~de centre~~ $C(c_1, c_2)$ et de rayon AB a pour équation cartésienne :

$$(x - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = (b_2 - a_2)^2 + (b_1 - a_1)^2$$

En développant on trouve $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$.

⊛ $\mathcal{C}$ est stable par racine carrée : Supposons $a \in \mathbb{R}^+$ constructible :

(Réf : Michel Audin)



Se montre avec Pythagore et l'angle au centre.

⊛ La duplication du cube n'est pas possible :

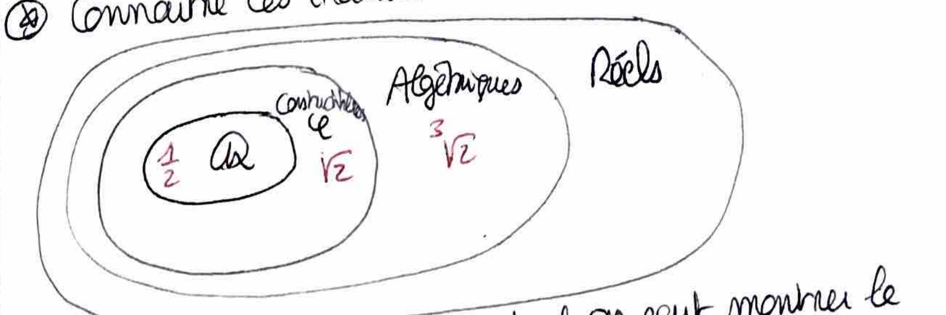
On cherche à construire $\sqrt[3]{2}$, son polynôme minimal est de degré 3 $(X^3 - 2)$, se montre car $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Donc n'est pas constructible.

⊛ La quadrature du cercle n'est pas possible car :

Cela revient à montrer que $\sqrt{\pi}$ est constructible et donc $(\sqrt{\pi})^2 = \pi$ serait constructible mais c'est absurde car π est transcendant sur $\mathbb{Q}$ (résultat compliqué dû à Lindemann).

⊛ Connaître ces inclusions :



⊛ Grâce au théorème de Wantzel on peut montrer le théorème de Gauss :

Un polygone régulier à n côtés est constructible si $n = 2^\alpha p_1 \cdots p_k$ où $\alpha \geq 1$ et $p_1 \cdots p_k$ nombres premiers de Fermat distincts.

⊛ Réciproque de Wantzel ? (du corollaire)

On pose $P(X) = X^4 - X - 1$. (On peut montrer qu'il est irréductible) (réf : Carréga p. 38)

Il possède une racine réelle non constructible et donc la réciproque du corollaire est fausse.

⊛ Autre théorème :

θ est trissectable $\Leftrightarrow$ $4X^3 - 3X - \cos\theta$ est réductible dans $\mathbb{Q}(\cos\theta)[X]$.

(réf Carréga p. 42)

Bonus : On peut tout faire avec seulement un compas sans règle.